Tema 04.01: Análisis Estadístico de una serie temporal estacionaria

@umh1465: Análisis estadístico de series económicas

Xavi Barber

Centro de Investigación Operativa
Universidad Miguel Hernández de Elche

2018-04-12

1. Análisis Estadístico de una serie temporal

2. EJEMPLOS DE AR(p), MA(q) y ARMA(p,q)

Análisis Estadístico de una serie temporal

Análisis de una serie

- Para analizar y modelar una serie es necesario identificar la estructura que la genera, es decir, cómo influyen las observaciones del pasado en las futuras
- Herrramientas:
  - Función de autocorrelación Simple (ACF).
  - Función de autocorrelación Parcial (PACF).
- Los modelos lineales de las series temporales se pueden considerar como un método sofisticado de extrapolación de series temporales.

Función de Autocorrelación Simple

Utilizando los momentos centrales de orden 1 y orden 2 , se define la función de autocovarianzas:

$$\text{Media}: \mu_Y = E[Y_t]$$
$$\text{Varianza}: \sigma_Y^2 = Var[Y_t] = E[(Y_t - \mu_Y)^2]$$
$$\text{Autocovarianza de orden } k: \gamma_k = Cov(Y_t, Y_{t+k}) = E[(Y_t - \mu_Y)(Y_{t+k} - \mu_Y)]$$

Por lo tanto podremos definir la **Autocorrelación simple de orden** k como

$$\rho_k = \frac{Cov(Y_t, Y_{t+k})}{Var[Y_t]^{1/2} Var[Y_{t+k}]^{1/2}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

- Cumpliéndose que para k=0, pho_0=1
- ρ_k puede depender de k pero no va depender de los momentos concretos a los que se refieran los componentes de Y_t.

Suele decirse que la ACF representa la DURACIÓN y la INTENSIDAD de la MEMORIA del porceso Y_t.

Función de Autocorrelación Parcial

La **Autocorrelación Parcial de orden** k de un proceso Y_t *estacionario* se representa con el símbolo ϕ_{kk} y se define como el parámetro ϕ_{kk} en la regresión:

$$\tilde{Y}_t = \phi_{k1}\tilde{Y}_{t-1} + \ldots + \phi_{kk}\tilde{Y}_{t-k} + U_t$$

donde $\tilde{Y}_{t-i} = Y_{t-i} - \mu_Y (i = 0, 1, \ldots, k)$ y U_t son los errores *iid*.

Esta regresión se puede reescribir como:

$$Y_t = \phi_{k0} + \phi_{k1}Y_{t-1} + \ldots + \phi_{kk}Y_{t-k} + U_t$$

En la práctica es imposible calcular de estimar la ACF y la PACF en una serie, por lo que se selecciona una muestra de ésta y se realizar la estimación.

- Las ACF proporcionan información sobre cómo una observación influye en las siguientes.
- Las PACF proporcionan la relación **directa** exisitente entre observaciones separadas por k retardos.

```
acf(x, lag.max = NULL,
    type = c("correlation", "covariance", "partial"),
    plot = TRUE, na.action = na.fail, demean = TRUE, ...)

pacf(x, lag.max, plot, na.action, ...)
```

- Es de resaltar que en este enfoque de modelización de las series temporales se requiere que la variable objeto del estudio sea estacionaria (en media y en varianza).
- En este contexto, además, se entiende por invertir un proceso la transformación de un modelo AR en su modelo MA equivalente. La generalización de este concepto permite transformar un modelo MA en su modelo AR equivalente
- Con el fin de sistematizar la exposición se va a estudiar en primer lugar los modelos autorregresivos (AR), en segundo lugar los modelos de medias móviles (MA) y, por último los modelos mixtos autorregresivos y de medias móviles (ARMA).

Modelos Autorrgresivos (AR)

Se dice que una serie temporal Y_t admite una representación autoregresiva (AR) de orden p , y se denota por $AR(p)$, si es susceptible de ser modelizada a través de la ecuación:

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

donde Y_t, Y_{t-1}, Y_{t-2} son son variables aleatorias concebidas como realizaciones de un proceso estocástico en los momentos del tiempo $t, t-1, t-2, \ldots$ que se caracterizan por $\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[Y_{t-1}] = \ldots$, $\mu, \phi_1, \ldots, \phi_p$ junto con la varianza del proceso σ^2_ε son lo sparámetros que definen el modelo.

Modelos de Medias Móviles (MA)

Se dice que una serie temporal Y_t admite una representación de medias móviles (MA) de orden q , y se denota por $MA(q)$, si es susceptible de ser modelizada a través de la ecuación:

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

donde Y_t es una variable aleatoria concebida como realizaciones de un porceso estocástico en los momentos de tiempo t, que s ecaracteriza por $\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[Y_{t-1}] = \ldots$, $\mu, \theta_1, \ldots, \theta_q$ junto con la varianza del proceso son los parámetros que define el modelo (que dene ser estimados). ε_t es un porceso constituido por v.a. *iid*.

Modelos Autoregressivos y de Medias Móviles (ARMA)

Se dice que una serie temporal Y_t admite una representación autorregresiva y de medias móviles de orden p, q respectivamente, y se denota por $ARMA(p, q)$, si es susceptible de ser modelizada a través de la ecuación:

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

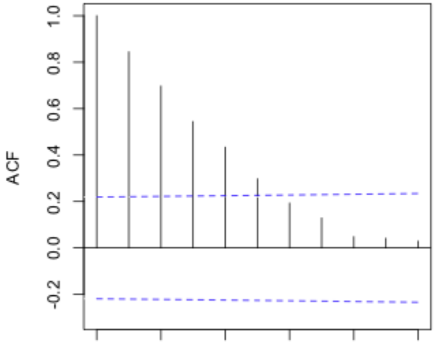
donde donde Y_t es una variable aleatoria concebida como realizaciones de un porceso estocástico en los momentos de tiempo t, que s ecaracteriza por $\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[Y_{t-1}] = \ldots$, $\mu, \phi_1, \ldots, \phi_p, \theta_1, \ldots, \theta_q$ junto con la varianza del proceso son los parámetros que define el modelo (que dene ser estimados). ε_t es un porceso constituido por v.a. *iid*.

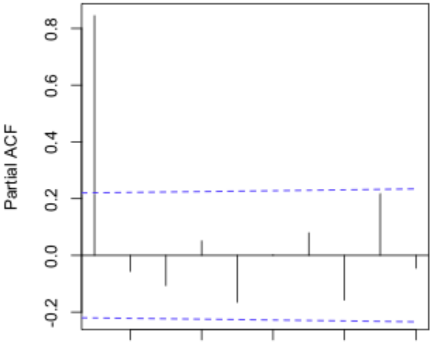
Modelos y Correlogramas

$AR(1)$

Se dice que una serie temporal t Y admite una representación autoregresiva (AR) de primer orden, y se denota por $AR(1)$, si es susceptible de ser modelizada a través de la ecuación:

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$





$AR(2)$

Se dice que una serie temporal t Y admite una representación autoregresiva (AR) de segundo orden, y se denota por $AR(2)$, si es susceptible de ser modelizada a través de la ecuación:

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

MA(1)

Se dice que una serie temporal Y_t admite una representación a través de medias móviles (MA) de primer orden, y se denota por $MA(1)$, si es susceptible de ser modelizada a través de la ecuación:

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 * \varepsilon_{t-1}$$

MA(2)

Se dice que una serie temporal Y_t admite una representación a través de medias móviles (MA) de segundo orden, y se denota por $MA(2)$, si es susceptible de ser modelizada a través de la ecuación:

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 * \varepsilon_{t-1} + \theta_2 * \varepsilon_{t-2}$$

ARMA(1,1)

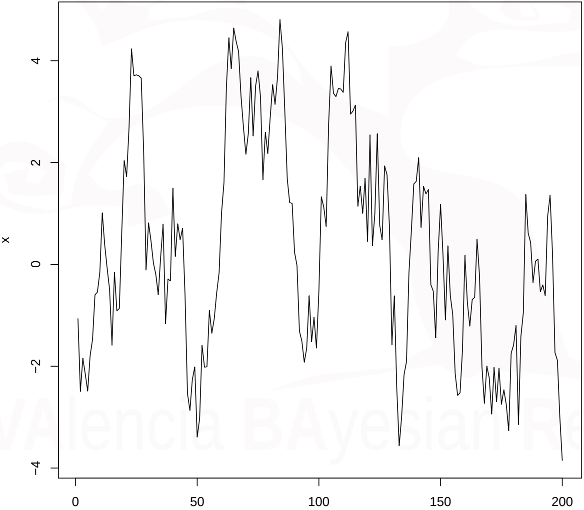
Se dice que una serie temporal t Y admite una representación autoregresiva y de medias móviles de primer orden, y se denota por $ARMA(1,1)$, si es susceptible de ser modelizada a través de la ecuación:

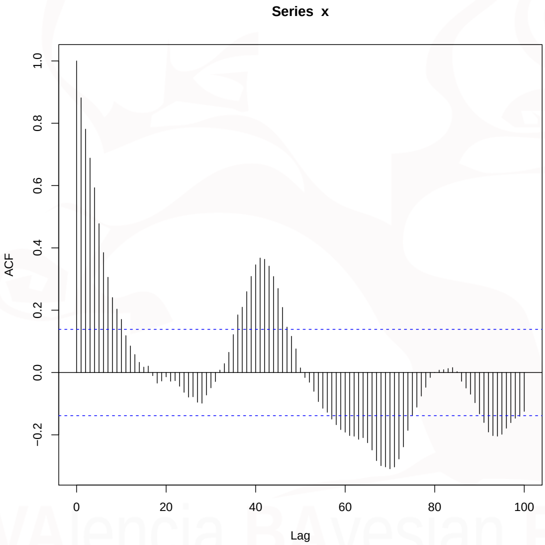
$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 * \varepsilon_{t-1}$$

EJEMPLOS DE AR(p), MA(q) y ARMA(p,q)

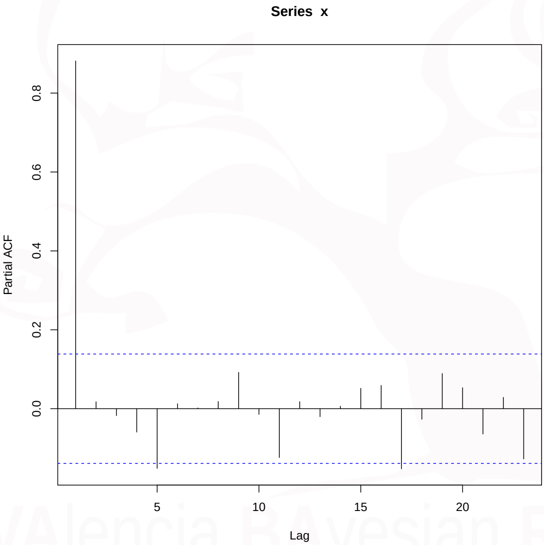
AR(1) $\phi_1 = 0.9$

```
x <- arima.sim( list("ar"=c(-0.99)),n=200)
```

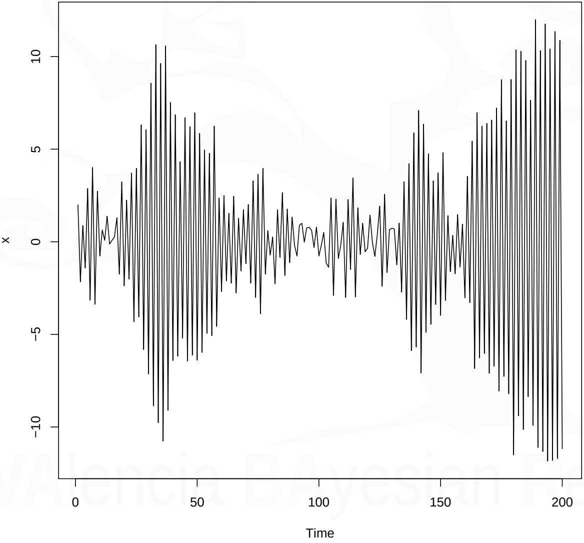


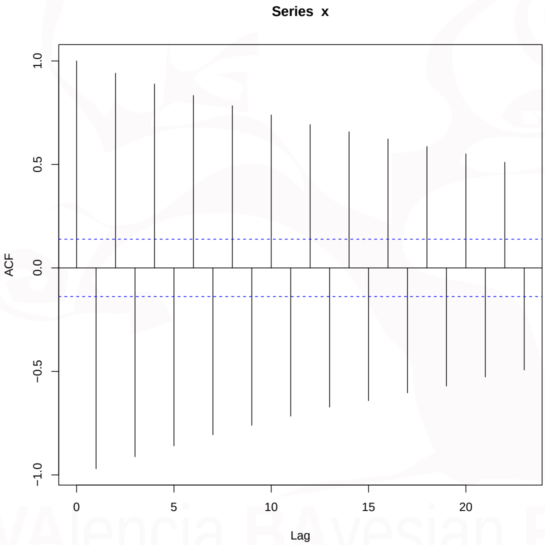


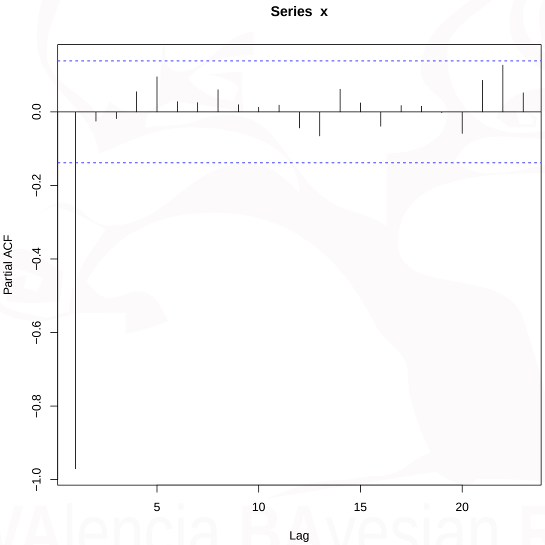
Series x
ACF
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
0
20
40
60
80
100
Lag


Series x
Partial ACF
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
5
10
15
20
Lag

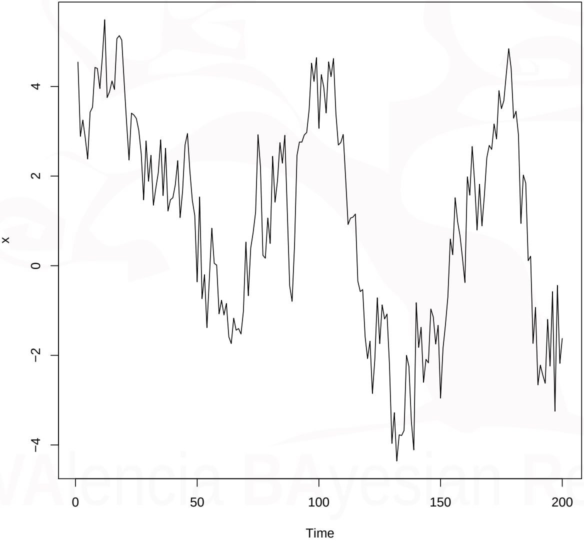
AR(1) $\phi_1 = -0.9$

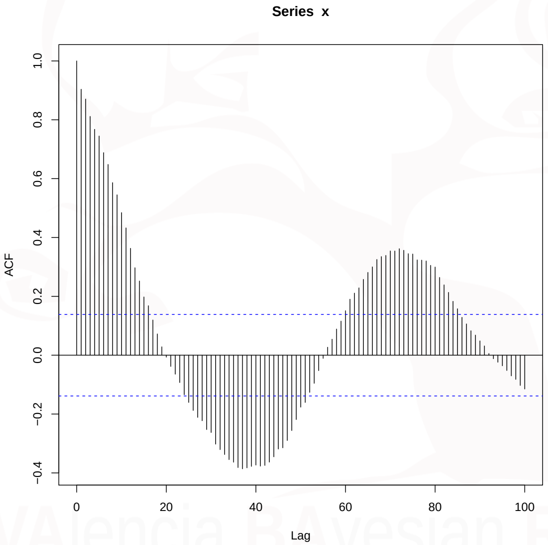


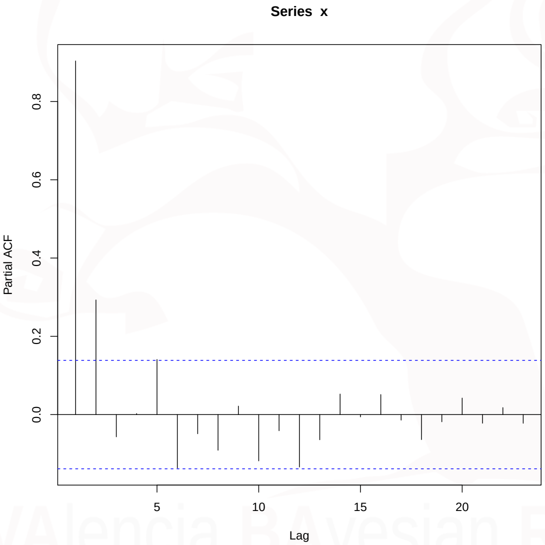

Series x
ACF
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0
5
10
15
20
Lag


Series x
Partial ACF
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1.0
5
10
15
20
Lag

AR(2): “ar”=c(0.5,0.45)

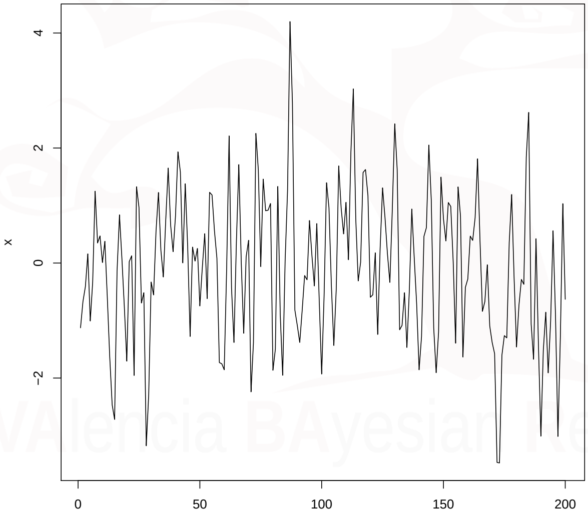


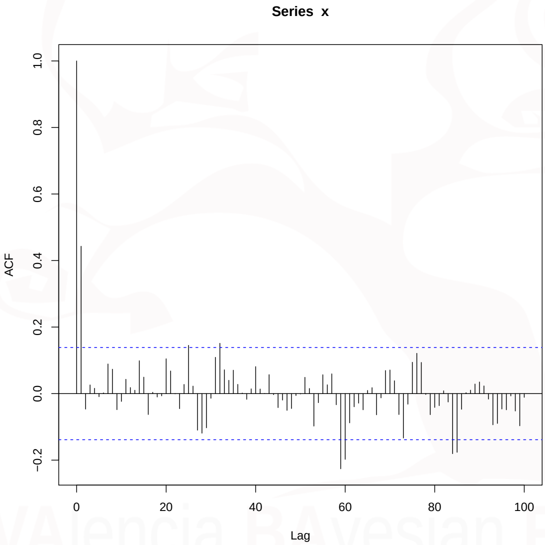

Series x
ACF
Lag
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
0
20
40
60
80
100

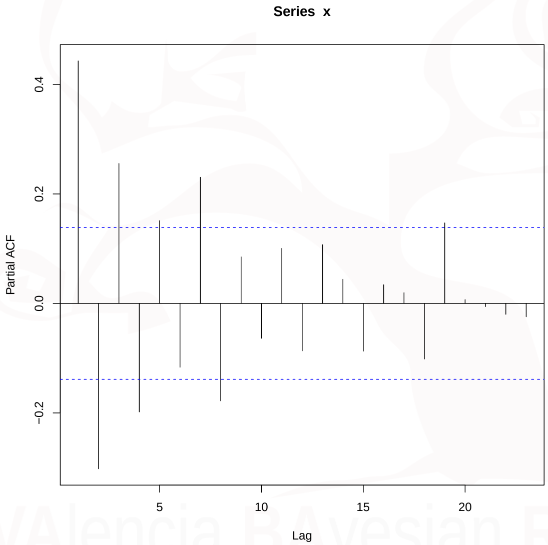

Series x
Partial ACF
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
5
10
15
20
Lag

MA(1): “ma”=0.9

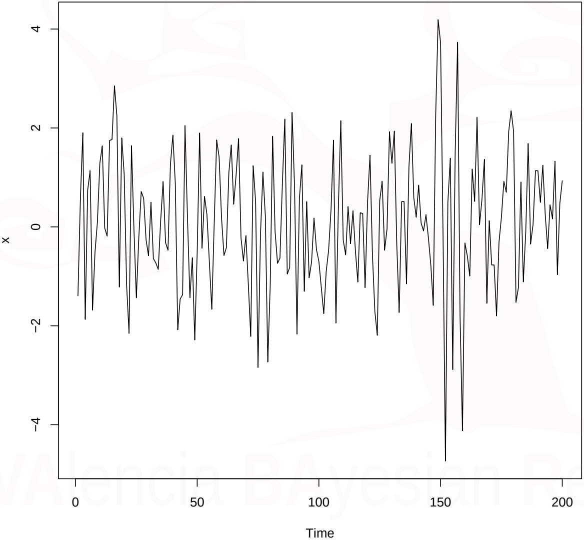
```
x <- arima.sim( list("ma"=c(0.9)),n=200)
```

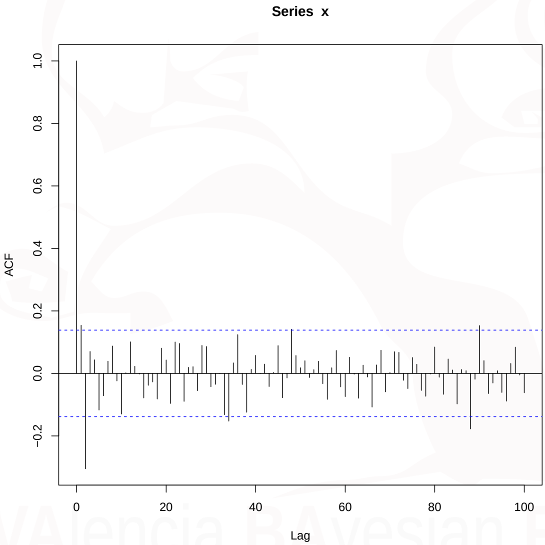


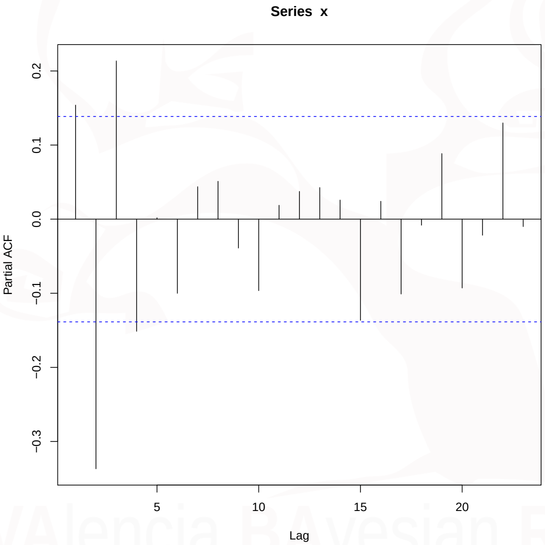

Series x
ACF
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
0
20
40
60
80
100
Lag


Series x
Partial ACF
0.4
0.2
0.0
−0.2
5
10
15
20
Lag

MA(2): "ma"=c(0.9, -0.5)

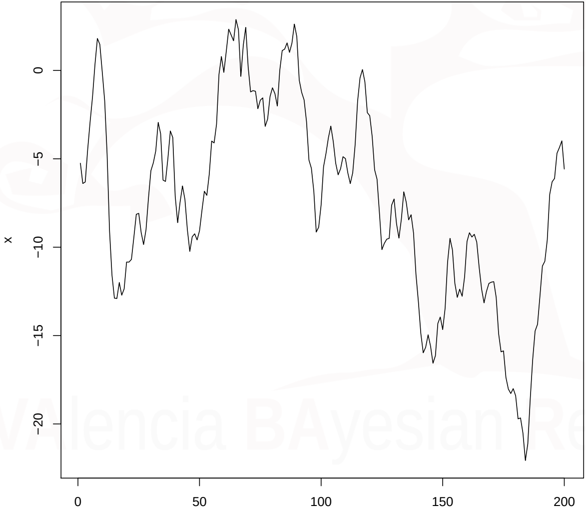


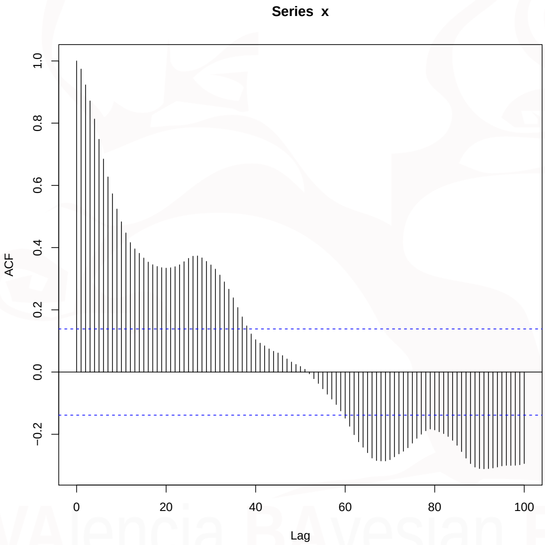

Series x
ACF
Lag
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
0
20
40
60
80
100

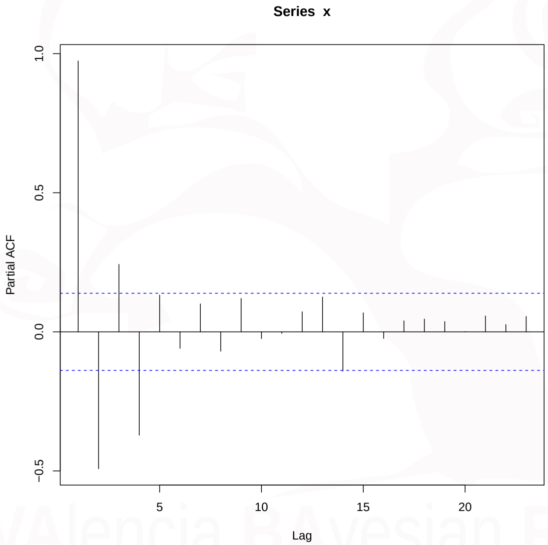

Series x
Partial ACF
0.2
0.1
0.0
−0.1
−0.2
−0.3
5
10
15
20
Lag

ARMA(1,1): “ar”=c(0.99) ,“ma”=c(0.9)

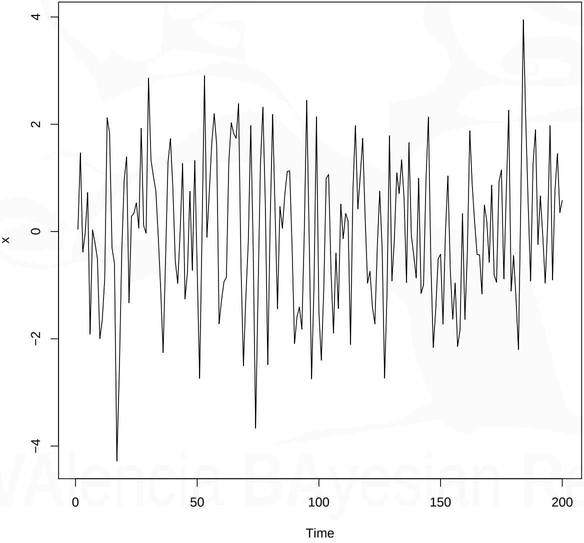
```
x <- arima.sim( list("ar"=c(0.99) ,"ma"=c(0.9)),n=200)
```

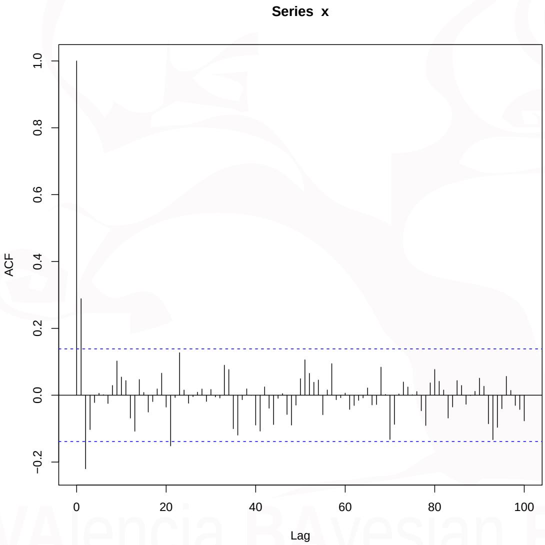


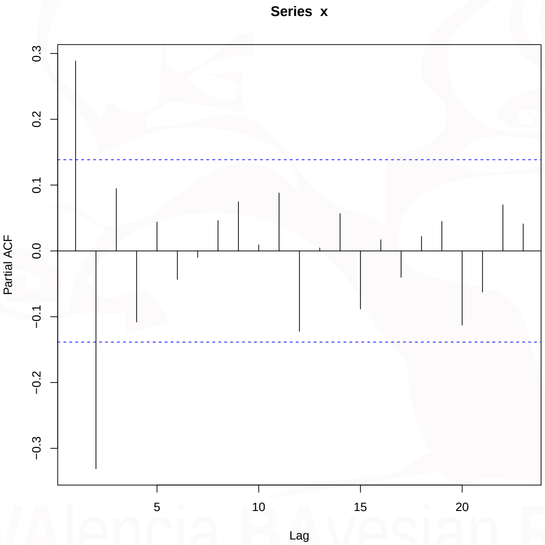

Series x
ACF
Lag
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
0
20
40
60
80
100


Series x
Partial ACF
1.0
0.5
0.0
−0.5
5
10
15
20
Lag

ARMA(1,1): "ar"=c(0.99) ,"ma"=c(-0.5)




Series x
ACF
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
0
20
40
60
80
100
Lag


Series x
Partial ACF
Lag
0.3
0.2
0.1
0.0
−0.1
−0.2
−0.3
5
10
15
20