

# Tema 04: Análisis Estadístico de una serie temporal estacionaria

## Análisis estadístico de series económicas

Xavier Barber

Departamento de Estadística, Matemáticas e Informática  
Centro de Investigación Operativa  
Universitas Miguel Hernández de Elche

21/Mar/2019

# Análisis Estadístico de una serie temporal

# Análisis de una serie

- Para analizar y modelar una serie es necesario identificar la estructura que la genera, es decir, cómo influyen las observaciones del pasado en las futuras
- Herramientas:
  - Función de autocorrelación Simple (ACF).
  - Función de autocorrelación Parcial (PACF).
- Los modelos lineales de las series temporales se pueden considerar como un método sofisticado de extrapolación de series temporales.

# Función de Autocorrelación Simple

Utilizando los momentos centrales de orden 1 y orden 2 , se define la función de autocovarianzas:

$$\text{Media : } \mu_Y = E[Y_t]$$

$$\text{Varianza : } \sigma_Y^2 = \text{Var}[Y_t] = E[(Y_t - \mu_Y)^2]$$

$$\text{Autocov. de orden } k : \gamma_k = \text{Cov}(Y_t, Y_{t+k}) = E[(Y_t - \mu_Y)(Y_{t+k} - \mu_Y)]$$

Por lo tanto podremos definir la **Autocorrelación simple de orden  $k$**  como

$$\rho_k = \frac{Cov(Y_t, Y_{t+k})}{Var[Y_t]^{1/2}Var[Y_{t+k}]^{1/2}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

- Cumpliéndose que para  $k=0$ ,  $\rho_0=1$
- $\rho_k$  puede depender de  $k$  pero no va depender de los momentos concretos a los que se refieran los componentes de  $Y_t$ .

**Suele decirse que la ACF representa la DURACIÓN y la INTENSIDAD de la MEMORIA del proceso  $Y_t$ .**

# Función de Autocorrelación Parcial

La **Autocorrelación Parcial de orden  $k$**  de un proceso  $Y_t$  estacionario se representa con el símbolo  $\phi_{kk}$  y se define como el parámetro  $\phi_{kk}$  en la regresión:

$$\tilde{Y}_t = \phi_{k1}\tilde{Y}_{t-1} + \dots + \phi_{kk}\tilde{Y}_{t-k} + U_t$$

donde  $\tilde{Y}_{t-i} = Y_{t-i} - \mu_Y$  ( $i = 0, 1, \dots, k$ ) y  $U_t$  son los errores *iid*.

Esta regresión se puede reescribir como:

$$Y_t = \phi_{k0} + \phi_{k1}Y_{t-1} + \dots + \phi_{kk}Y_{t-k} + U_t$$

# ACF y PACF

En la práctica es imposible calcular de estimar la ACF y la PACF en una serie, por lo que se selecciona una muestra de ésta y se realizar la estimación.

- Las ACF proporcionan información sobre cómo una observación influye en las siguientes.
- Las PACF proporcionan la relación **directa** existente entre observaciones separadas por  $k$  retardos.

```
acf(x, lag.max = NULL,  
    type = c("correlation", "covariance", "partial"),  
    plot = TRUE, na.action = na.fail, demean = TRUE, ...)
```

```
pacf(x, lag.max, plot, na.action, ...)
```

# ACF y PACF

- Es de resaltar que en este enfoque de modelización de las series temporales se requiere que la variable objeto del estudio sea estacionaria (en media y en varianza).
- Con el fin de sistematizar la exposición se va a estudiar en primer lugar los modelos autorregresivos (AR), en segundo lugar los modelos de medias móviles (MA) y, por último los modelos mixtos autorregresivos y de medias móviles (ARMA).



# PACF

- En este contexto, además, se entiende por invertir un proceso la transformación de un modelo AR en su modelo MA equivalente. La generalización de este concepto permite transformar un modelo MA en su modelo AR equivalente

# Modelos Autorregresivos (AR)

Se dice que una serie temporal  $Y_t$  admite una representación autoregresiva (AR) de orden  $p$ , y se denota por  $AR(p)$ , si es susceptible de ser modelizada a través de la ecuación:

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

donde  $Y_t, Y_{t-1}, Y_{t-2}$  son variables aleatorias concebidas como realizaciones de un proceso estocástico en los momentos del tiempo  $t, t-1, t-2, \dots$  que se caracterizan por  $\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[Y_{t-1}] = \dots, \mu, \phi_1, \dots, \phi_p$  junto con la varianza del proceso  $\sigma_\varepsilon^2$  son los parámetros que definen el modelo.

# Modelos de Medias Móviles (MA)

Se dice que una serie temporal  $Y_t$  admite una representación de medias móviles (MA) de orden  $q$ , y se denota por  $MA(q)$ , si es susceptible de ser modelizada a través de la ecuación:

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q\varepsilon_{t-q}$$

# Modelos de Medias Móviles (MA)

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q\varepsilon_{t-q}$$

donde  $Y_t$  es una variable aleatoria concebida como realizaciones de un proceso estocástico en los momentos de tiempo  $t$ , que se caracteriza por  $\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[Y_{t-1}] = \dots, \mu, \theta_1, \dots, \theta_q$  junto con la varianza del proceso son los parámetros que define el modelo (que deben ser estimados).  $\varepsilon_t$  es un proceso constituido por v.a. *iid*.

# Modelos Autoregresivos y de Medias Móviles (ARMA)

Se dice que una serie temporal  $Y_t$  admite una representación autorregresiva y de medias móviles de orden  $p, q$  respectivamente, y se denota por  $ARMA(p, q)$ , si es susceptible de ser modelizada a través de la ecuación:

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

# Modelos Autoregresivos y de Medias Móviles (ARMA)

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

donde  $Y_t$  es una variable aleatoria concebida como realizaciones de un proceso estocástico en los momentos de tiempo  $t$ , que se caracteriza por

$\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[Y_{t-1}] = \dots, \mu, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q$  junto con la varianza del proceso son los parámetros que define el modelo (que deben ser estimados).  $\varepsilon_t$  es un proceso constituido por v.a. *iid*.

# Modelos y Correlogramas

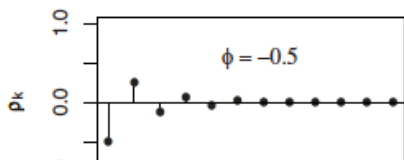
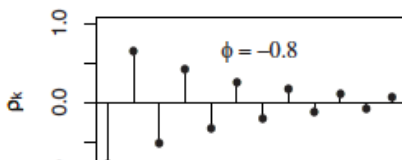
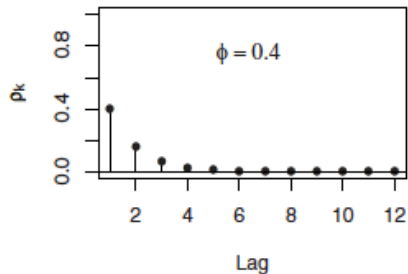
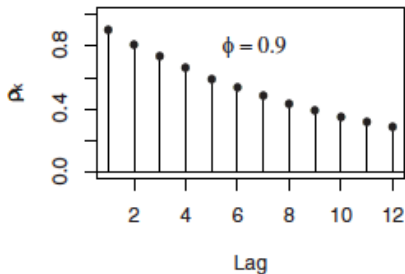
# $AR(1)$

Se dice que una serie temporal  $Y_t$  admite una representación autoregresiva de primer orden,  $AR(1)$ , si puede modelizarse a través de la ecuación:

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$



# AR(1)



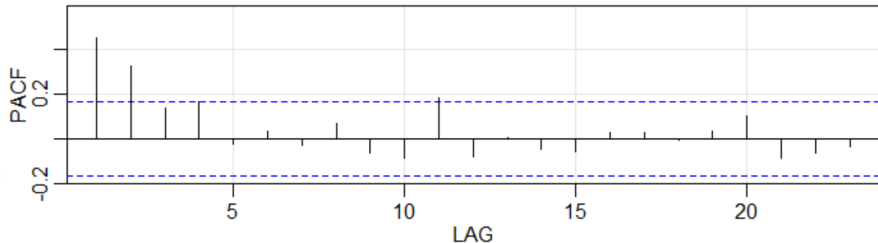
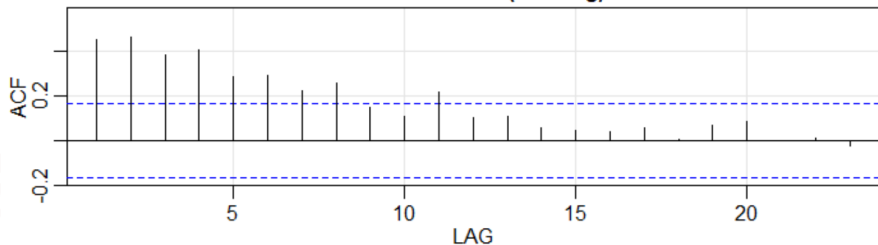
# $AR(2)$

Se dice que una serie temporal  $Y_t$  admite una representación autoregresiva (AR) de segundo orden, y se denota por  $AR(2)$ , si es susceptible de ser modelizada a través de la ecuación:

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

# AR(2)

Series: residuals(initialreg)

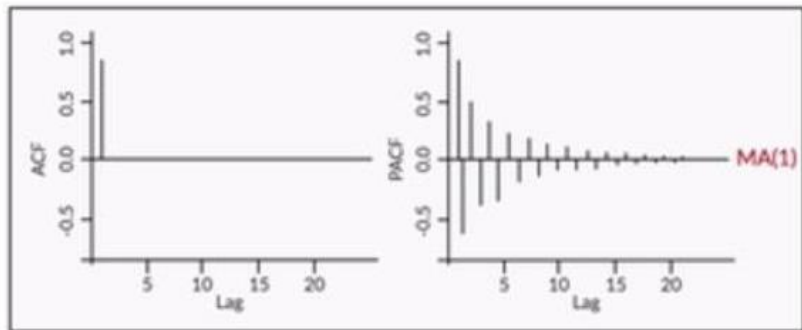


# MA(1)

Se dice que una serie temporal  $Y_t$  admite una representación a través de medias móviles (MA) de primer orden, y se denota por  $MA(1)$ , si es susceptible de ser modelizada a través de la ecuación:

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 * \varepsilon_{t-1}$$

# MA(1)



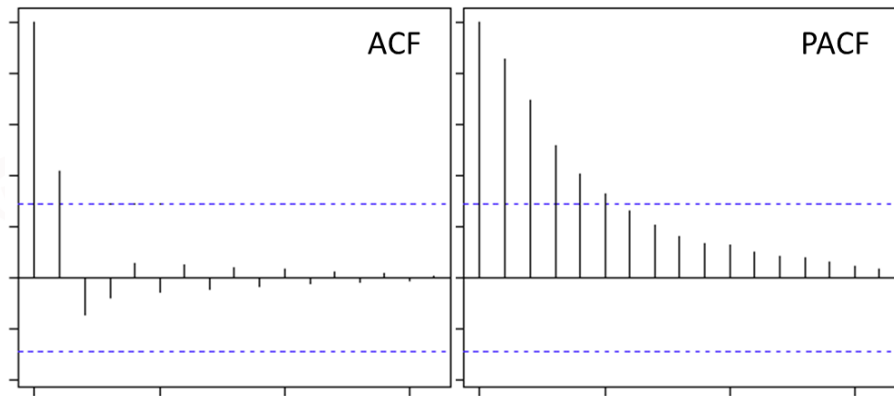
ACF and PACF plots for MA model

# MA(2)

Se dice que una serie temporal  $Y_t$  admite una representación a través de medias móviles (MA) de segundo orden, y se denota por  $MA(2)$ , si es susceptible de ser modelizada a través de la ecuación:

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 * \varepsilon_{t-1} + \theta_2 * \varepsilon_{t-2}$$

# MA(2)



# ARMA(1,1)

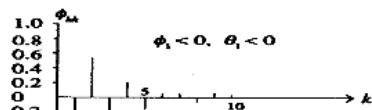
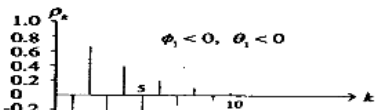
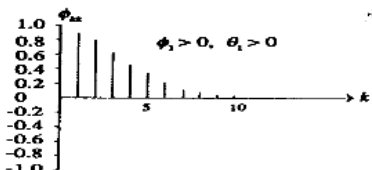
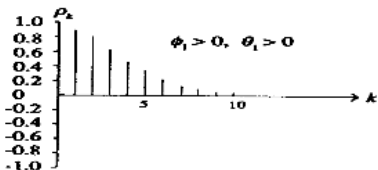
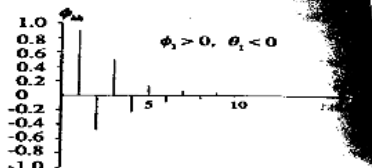
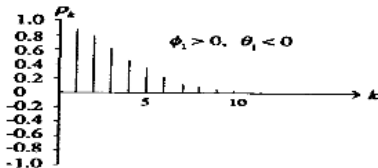
Se dice que una serie temporal  $Y_t$  admite una representación autoregresiva y de medias móviles de primer orden, y se denota por  $ARMA(1, 1)$ , si es susceptible de ser modelizada a través de la ecuación:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 * \varepsilon_{t-1}$$



## ARMA (1,1)

## ACF and PACF of an ARMA(1,1)

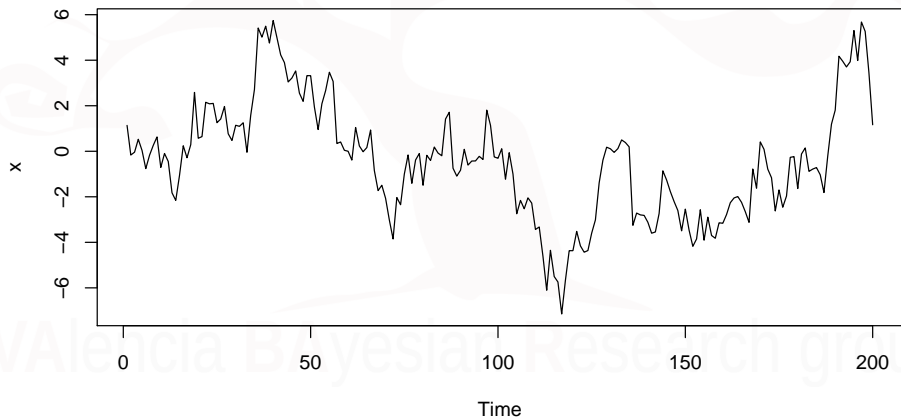


# EJEMPLOS DE AR(p), MA(q) y ARMA(p,q)

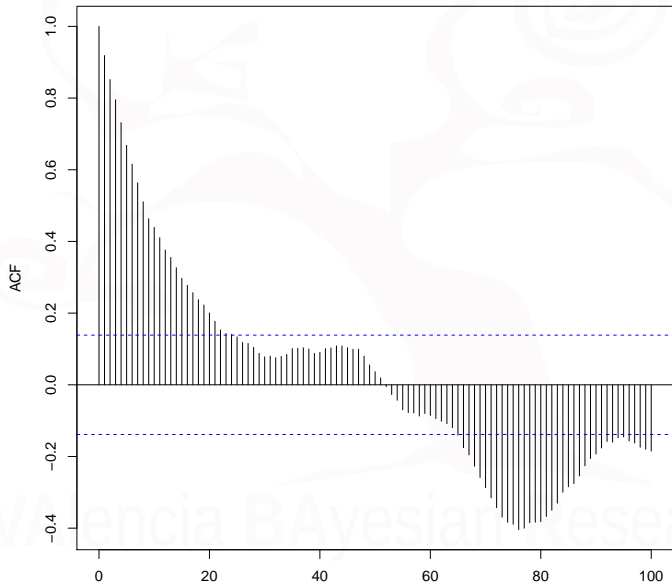
Valencia Bayesian Research group

# AR(1) $\phi_1 = 0.9$

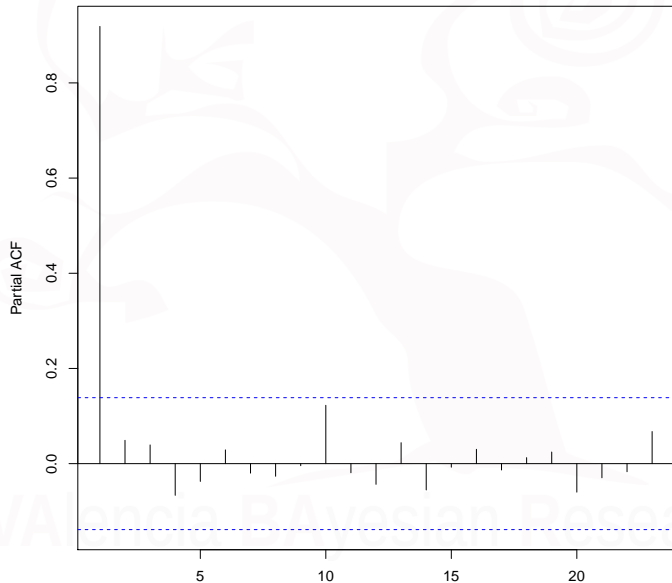
```
x <- arima.sim( list("ar"=c(-0.99)),n=200)
```



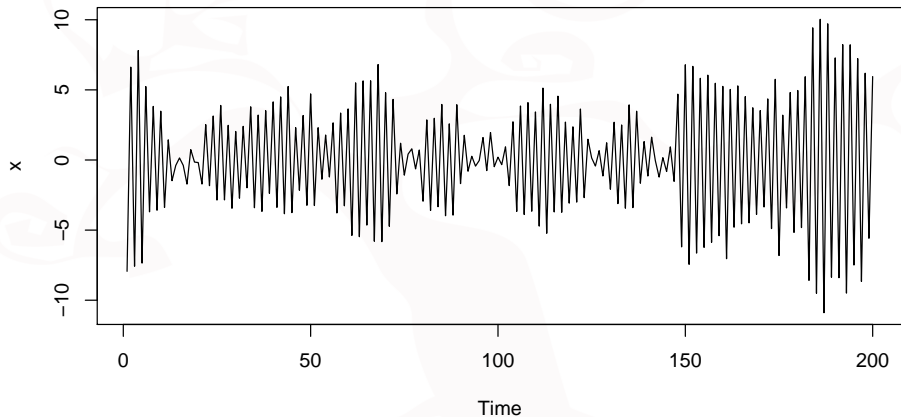
Series x



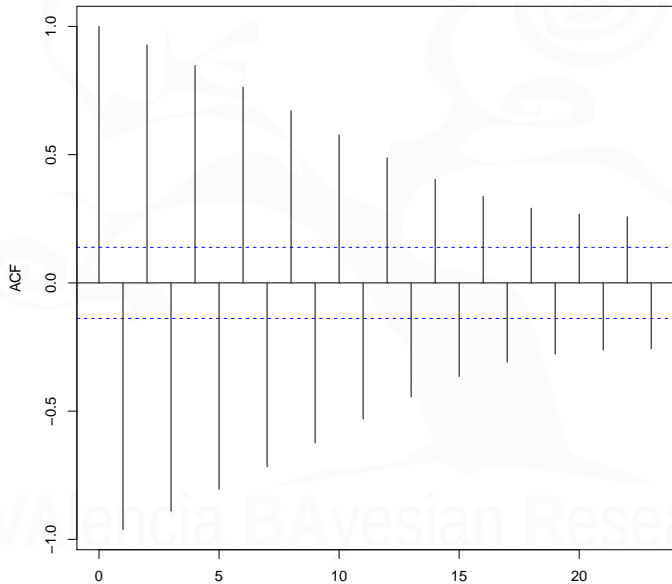
Series x



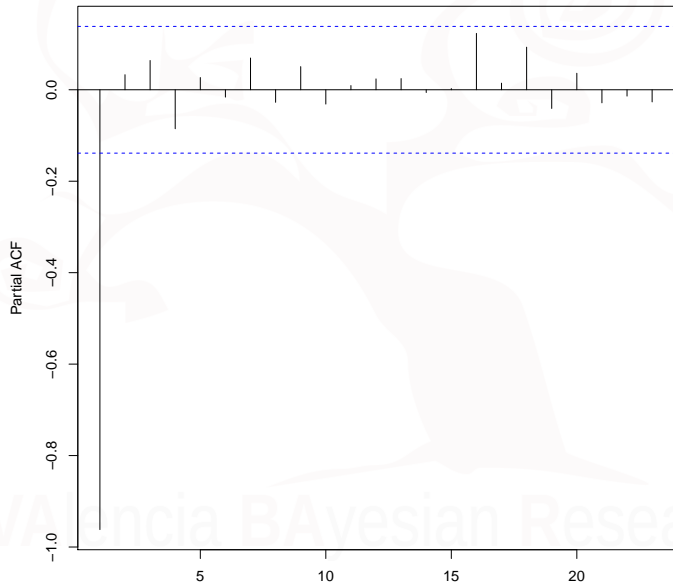
# AR(1) $\phi_1 = -0.9$



Series x

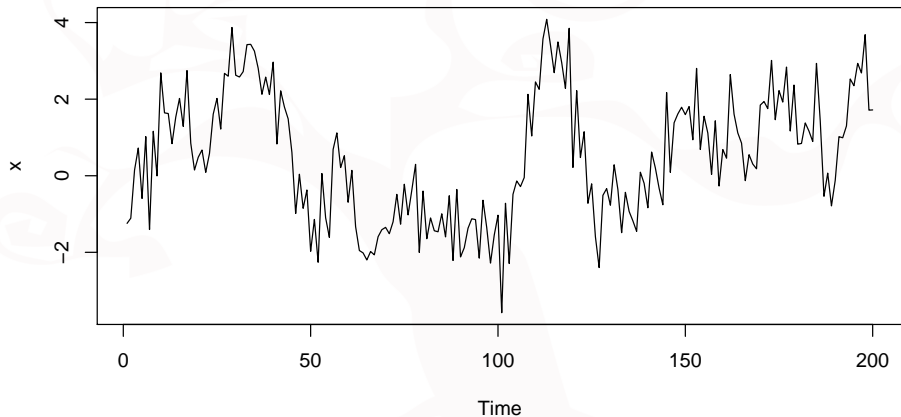


Series x

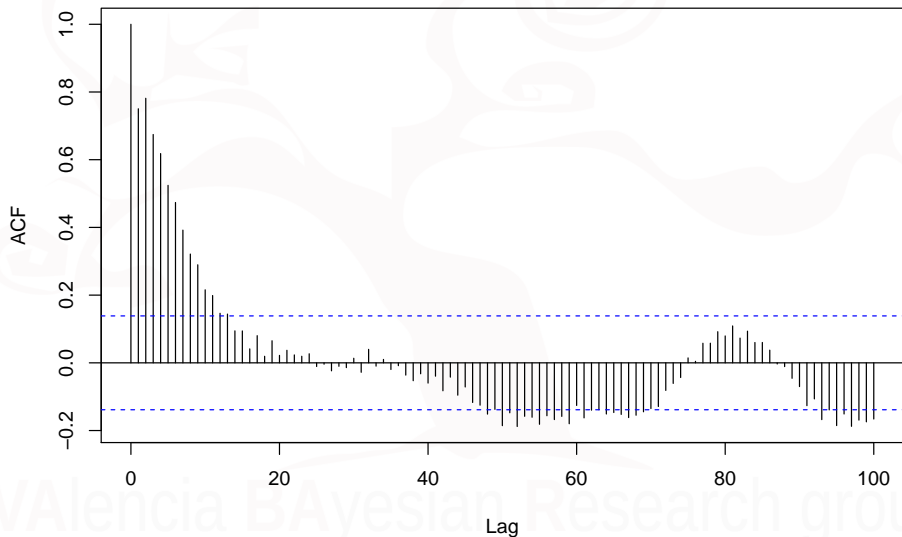


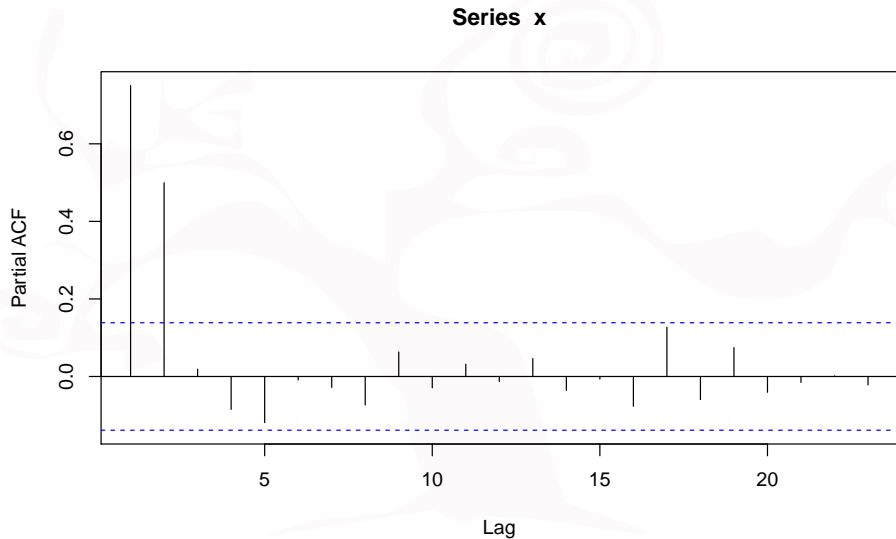


# AR(2): “ar” = c(0.5,0.45)



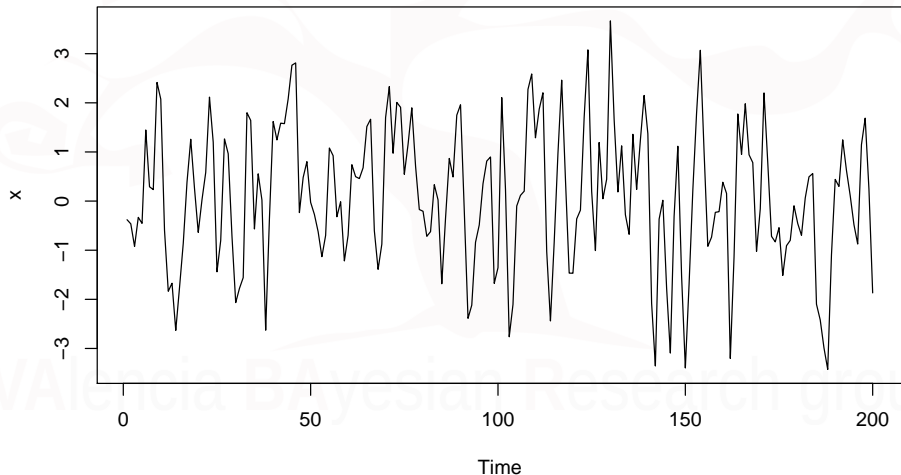
## Series x



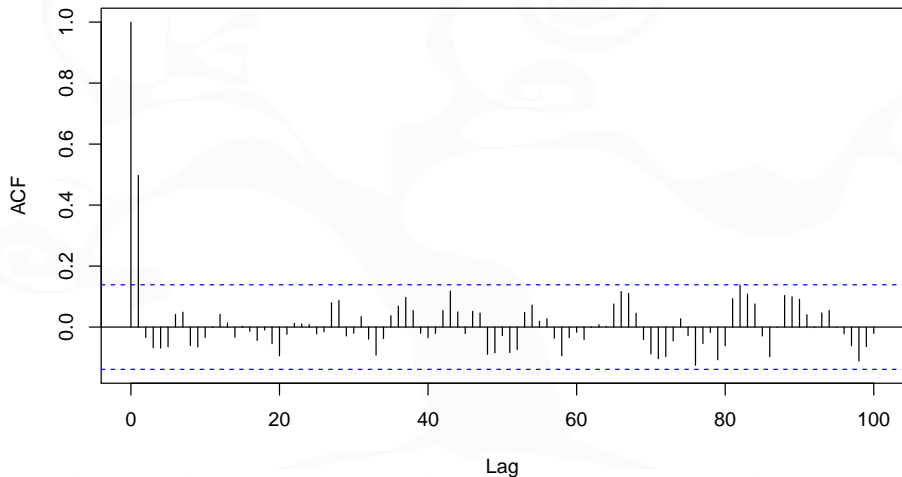


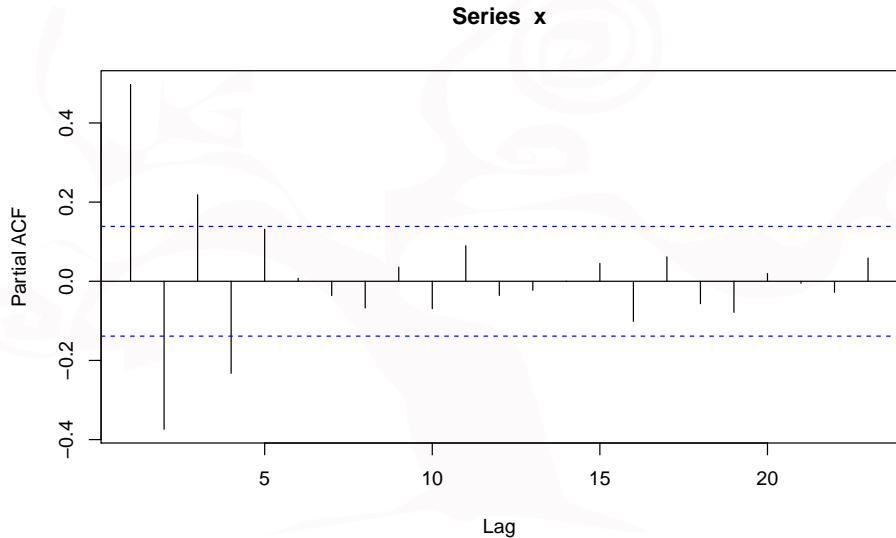
# MA(1): "ma"=0.9

```
x <- arima.sim( list("ma"=c(0.9)),n=200)
```

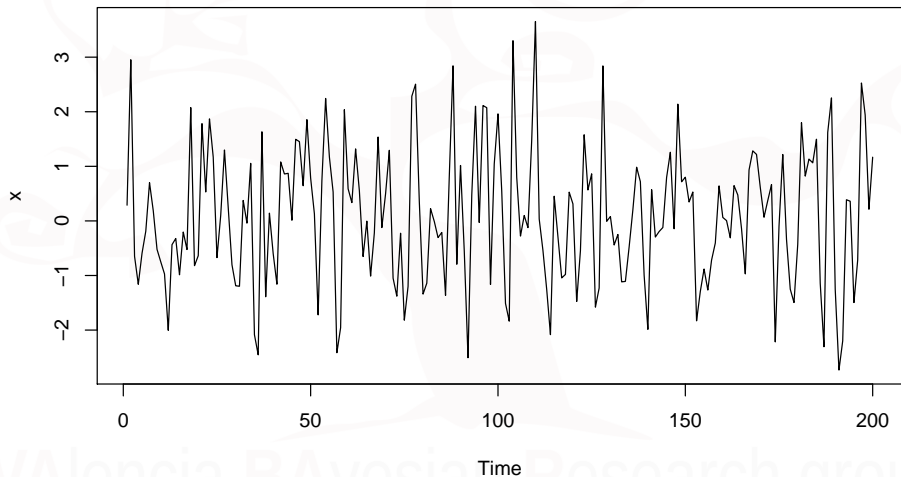


Series x

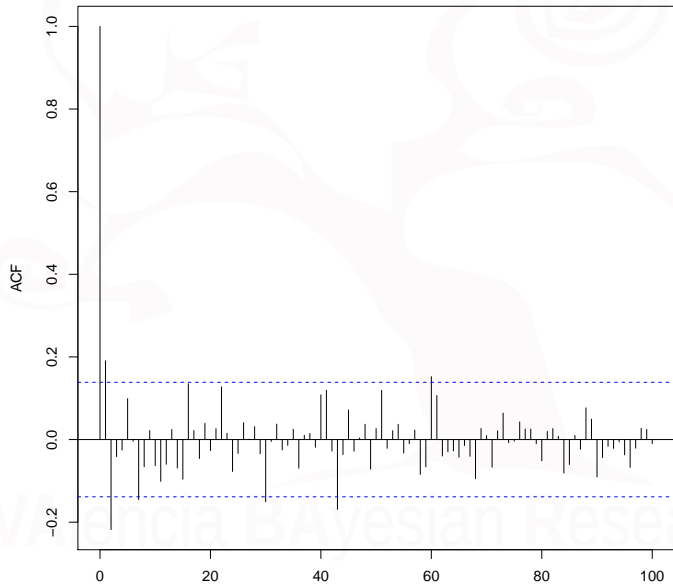




# MA(2): “ma”=c(0.9, -0.5)

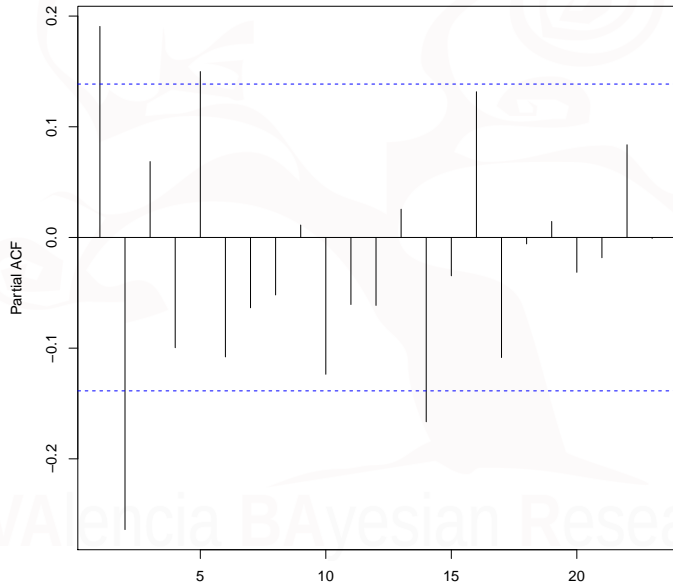


Series x



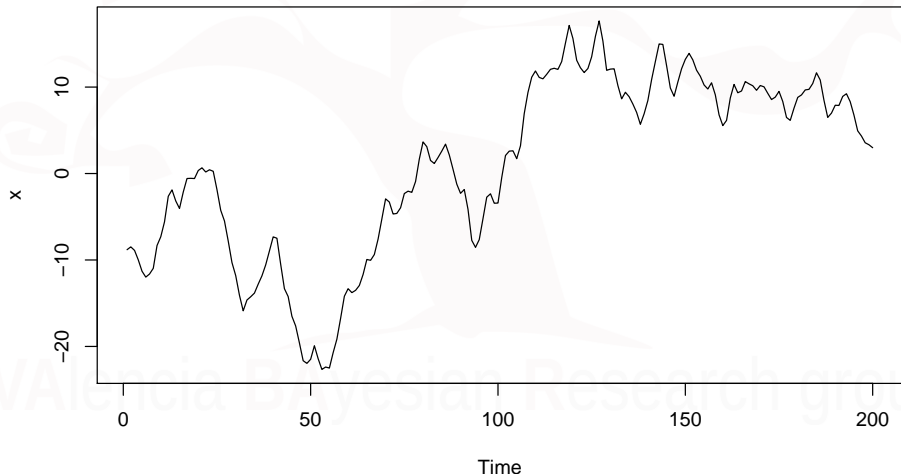


Series x

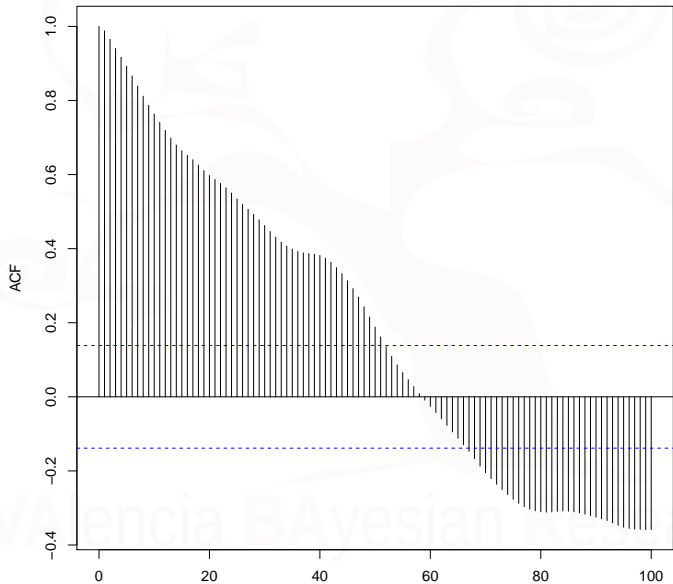


# ARMA(1,1): “ar”=c(0.99) , “ma”=c(0.9)

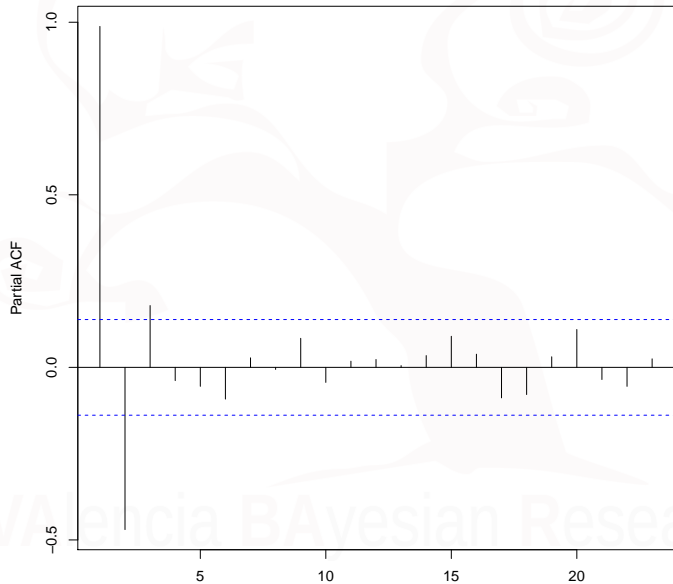
```
x <- arima.sim( list("ar"=c(0.99) , "ma"=c(0.9))
```



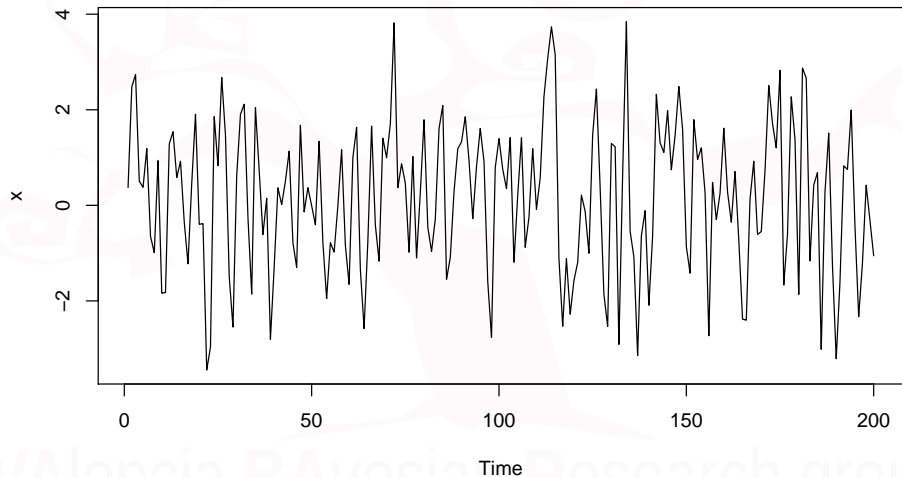
Series x



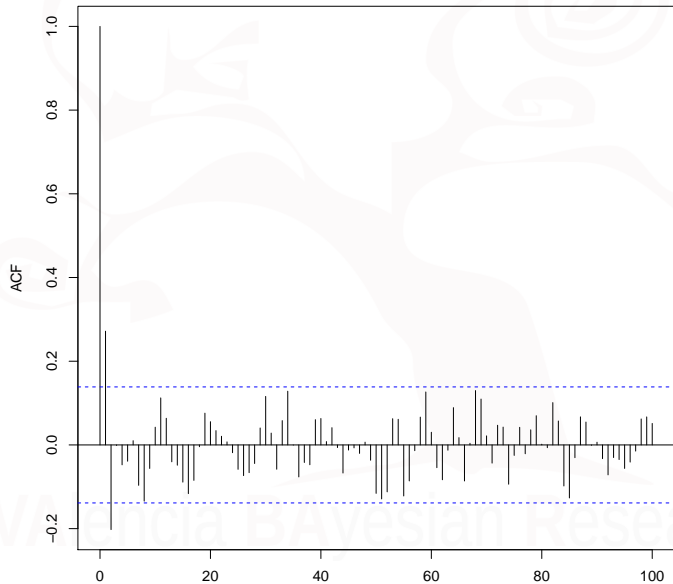
Series x



ARMA(1,1): “ar”=c(0.99) , “ma”=c(-0.5)



Series x



Series x

